E.N.S.A.M. SESSION DE 1982

MATHÉMATIQUES

(Options T et TA)

Épreuve n° 2 (problème)

DURÉE : 3 heures

Il est recommandé aux candidats de citer brièvement mais avec précision les résultats de cours utilisés et de limiter leurs démonstrations au strict nécessaire.

L'espace affine euclidien orienté E est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Un point M de E est repéré par ses coordonnées (x, y, z).

On désigne :

— par Ω le sous-ensemble des points de E n'appartenant pas à l'axe Oz :

$$\Omega = \{ M(x, y, z) \in E \mid x^2 + y^2 \neq 0 \}$$

— par m la projection orthogonale d'un point M de Ω sur le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et par $\vec{u}$ et $\vec{p}$ les vecteurs définis par les relations :

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{Om}}{\| \overrightarrow{Om} \|} \qquad \vec{p} = \vec{k} \wedge \vec{u}$$

Un point M de Ω est repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) où r désigne la norme de $\overrightarrow{Om}$ $(r = \| \overrightarrow{Om} \|)$ et où θ désigne la détermination de l'angle $(\vec{i}, \vec{u})$ comprise entre 0 et 2π ($\theta \in [0, 2\pi[$).

Soit ψ l'application :

$$\begin{cases}]0 \infty [\times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \Omega \\ (r, \theta, z) \longmapsto (x = r \cos\theta,\ y = r \sin\theta,\ z) \end{cases}$$

A toute fonction (notée par exemple λ) de $\Omega \to \mathbb{R}$ on fait correspondre l'application composée $\Lambda :]0, \infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\Lambda = \lambda \circ \psi$$

de telle sorte qu'en tout point M de Ω pour lequel les fonctions λ et Λ sont définies, on ait l'égalité :

$$\lambda(x, y, z) = \Lambda(r, \theta, z)$$

Les trois parties sont indépendantes

I

On désigne par φ une fonction deux fois continûment différentiable des variables (x, y, z), et on suppose que cette fonction dépend uniquement de la distance du point M (x, y, z) de Ω à l'axe Oz $\left(\varphi(x, y, z) = \Phi(r)\right)$.

1° Calculer dans ce cas le laplacien $\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$ en fonction des dérivées de Φ.

2° On suppose pour la suite que $\Delta\varphi = -\varphi$.

Montrer que la fonction Φ est solution de l'équation différentielle (B) :

$$(B) \qquad J''(r) + \frac{1}{r} J'(r) + J(r) = 0$$

3° Montrer que l'équation (B) admet des solutions développables en série entière au voisinage de $r = 0$.

Préciser les coefficients et le domaine de convergence.

4° On désigne par J_0 la solution particulière de B développable en série entière au voisinage de 0 telle que $J_0(0) = 1$.

Soit t un paramètre réel > 0.

a. Calculer l'intégrale $I_n(t)$:

$$I_n(t) = \int_0^\infty r^{2n} e^{-rt}\, dr$$

.../...

b. En déduire l'expression de l'intégrale $A(t)$ pour $t > 1$:

$$A(t) = \int_0^{\infty} J_0(r)\, e^{-rt}\, dr$$

On admettra la possibilité d'intégrer terme à terme sur $[0, \infty[$ et on utilisera le développement en série entière de la fonction $u \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$ au voisinage de l'origine.

II

Les questions 2° et 3° sont indépendantes du 1°

1° On considère le champ vectoriel $\vec{V}_1$ défini sur Ω par :

$$\vec{V}_1(M) = \frac{x}{r^2}\vec{p} \qquad (M \in \Omega)$$

et la courbe Γ définie par $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = \frac{R^2\cos^2 t}{a}$ $(t \in [0, 2\pi[)$ (a et R constantes > 0).

Γ est orientée de façon que sa projection orthogonale sur le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ soit orientée dans le sens direct.

Calculer la circulation du champ $\vec{V}_1$ le long de Γ.

2° On désigne par φ une fonction continûment différentiable des variables (x, y, z) et par Φ la fonction associée $\left(\varphi(x, y, z) = \Phi(r, \theta, z)\right)$.

Calculer $\overrightarrow{\text{gradient}}\,(\varphi)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, puis dans la base $(\vec{u}, \vec{p}, \vec{k})$ à l'aide de Φ et de ses dérivées.

3° Soit f une fonction continûment différentiable de (x, y, z) et F la fonction associée $\left(f(x, y, z) = F(r, \theta, z)\right)$.

On considère le champ vectoriel $\vec{V}$: $\vec{V}(M) = f(x, y, z)\,\vec{p}$.

a. Évaluer le rotationnel de $\vec{V}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, puis dans la base $(\vec{u}, \vec{p}, \vec{k})$ à l'aide de F et de ses dérivées.

b. En déduire les conditions nécessaires pour que le champ $\vec{V}$ soit un champ de gradients.

Donner la forme générale des fonctions f vérifiant ces conditions.

c. Déterminer un potentiel scalaire dont dérive le champ $\vec{V}_1$.

III

Les questions 2° et 3° sont indépendantes du 1°

1° On considère le champ vectoriel $\vec{V}_2$ défini sur Ω par :

$$\overrightarrow{V_2(M)} = \frac{1}{\|\overrightarrow{OM}\|}\vec{p}$$

et le domaine D défini par $y = 0$, $x^2 + z^2 - 2Rx \leqslant 0$, $R \leqslant x$ où R est une constante > 0.

Le domaine D est orienté par le vecteur normal $\vec{j}$.

Calculer le flux du champ $\vec{V}_2$ à travers D.

2° On désigne par g une fonction continûment différentiable des variables (x, y, z) et par G la fonction associée $\left(g(x, y, z) = G(r, \theta, z)\right)$.

On considère le champ vectoriel $\vec{W}$ défini par $\overrightarrow{W(M)} = g(x, y, z)\,\vec{k}$.

Évaluer $\overrightarrow{\text{Rot}}\,(\vec{W})$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ puis dans la base $(\vec{u}, \vec{p}, \vec{k})$ à l'aide de G et de ses dérivées.

3° On désigne par f une fonction continûment différentiable des variables (x, y, z) et par F la fonction associée $\left(f(x, y, z) = F(r, \theta, z)\right)$.

On considère le champ vectoriel $\vec{V}$: $\vec{V}(M) = f(x, y, z)\,\vec{p}$.

a. Évaluer $\text{Div}(\vec{V})$ à l'aide de F et de ses dérivées.

b. En déduire une condition nécessaire pour que $\vec{V}$ soit un champ de rotationnels.

c. En utilisant 2°, déterminer un potentiel vecteur dont dérive le champ $\vec{V}_2$.

FIN

1891

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail